**Unidad Temática I. Elementos de Probabilidad.**

**Tema 1.1. Generalidades.**

**Motivación 1. Probabilidad según Laplace o a priori o basada en el razonamiento.** Iniciamos esta motivación recordando la idea completamente intuitiva de cómo se calcula una probabilidad de un evento , y responde a lo establecido por Laplace. Su famosa definición consigna que:

si los casos posibles de un experimento aleatorio E son y

de esos casos losfavorables al evento son , entonces

la probabilidad del suceso se determina mediante el cociente.



Veamos un ejemplo. De los voluntarios que llegan a un banco de sangre, 1 de 3 tienen sangre tipo ; 1 de 15, tipo ; 1 de 3, tipo ; y 1 de 16, tipo . Se selecciona al azar un donante de los registrados en el banco. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada tenga: (a) Sangre tipo ?, (b) Sangre tipo O?, (c) Sangre tipo A?, (d) Sangre que no es del tipo A, ni O?

Ω

**Solución.** Si aplicamos el proceso de Laplace dividiendo los casos favorables al evento entre el total de casos entonces, por ejemplo, la probabilidad de tener sangre es . La probabilidad de tener sangre es . La probabilidad de tener sangre es y la de tener sangre es .

Con esta información podemos empezar a contestar las preguntas. a) En lo que dijimos anteriormente ya tenemos la respuesta y es , b) la probabilidad de tener sangre tipo O se obtiene sumando la probabilidad de tener sangre tipo y , es decir,

c)La probabilidad de tener sangre se obtiene sumando los que tienen sangre y

d)Como la suma de las probabilidades de tener sangre tipo o de cualquier otra debe ser 1, entonces la probabilidad de tener sangre que no es del tipo o se obtiene como

**Ejercicios.**

1. Se tienen 6 mentas, 4 chiclosos y 3 chocolates. Si se selecciona al azar un dulce encuentre la probabilidad de obtener (a) una menta, (b) un chicloso o un chocolate, (c) un chicloso o una menta o un chocolate, (d) no obtener un chocolate, (e) no obtener un chocolate o una menta.

**Ayuda: c)** son 13 casos favorables, **d)** son 10 casos favorables.

**Motivación 2. Definición frecuentista de la probabilidad o a posteriori o basada en la experimentación.** Lanzamos una moneda varias veces y hacemos una tabla donde registramos el número de veces que aparece cara . Por ejemplo, en el primer lanzamiento obtuvimos cara y la frecuencia es 1. En el segundo lanzamiento obtuvimos sello, no incrementamos H, y la frecuencia es ½. En el tercer lanzamiento volvemos a obtener sello, no incrementamos H, y la frecuencia es 1/3. En el cuarto lanzamiento obtuvimos cara y aumentamos H a 2 y la frecuencia es ½, etc.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| número de lanzamiento |  |  |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 |  |
| 3 | 1 |  |
| 4 | 2 |  |
| 5 | 3 |  |

Con la siguiente gráfica en EXCEL observamos que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor de ½.

**Subtema 1.1.1. Modelos probabilísticos y determinísticos.**

Utilizando la motivación 2 damos la siguiente definición

**Definición 1. Definición a posteriori de la probabilidad o basada en la experimentación.** Un experimento E es aleatorio o estocástico si

* es posible repetirlo indefinidamente y en cada realización el resultado que se obtiene varía, pero pertenece a un conjunto fijo llamado espacio muestral. Un evento es un subconjunto de .
* si el experimento se repite veces y es el número de veces que ocurre el evento entonces la frecuencia relativa del evento está definida por y si se va estabilizando a un número conforme , entonces decimos que la probabilidad de es y escribimos .

**Ejemplo 1. Cómo obtener la probabilidad a posteriori de un evento.** Consideremos otro experimento, el lanzamiento de un dado de seis caras. Y observemos el número de puntos que aparecen en la cara de arriba. Supongamos que el experimento se repite veces y sea el número de veces que aparecen en la cara de arriba. Nuevamente a medida que aumenta, la frecuencia relativa se va estabilizando. Suponiendo que el dado está perfectamente equilibrado, se esperaría que el valor estable de la frecuencia sea y se dice que la probabilidad de obtener es . Observe que esta probabilidad coincide con la probabilidad definida por Laplace porque los casos favorables del evento son 3 de 6 y entonces la probabilidad vale .

**Ejercicios.**

1. Lance un dado 40 veces y haga una tabla y un gráfico con EXCEL para medir la frecuencia con que aparecen las caras . Las frecuencias deben acercarse a 1/3.
2. ¿Cómo puede modificar una moneda para que salga cara con mayor frecuencia? Haga una tabla y gráfico en EXCEL?

**Definición 2. Definición de Laplace o a priori de la probabilidad.** Suponiendo que los casos posibles en que puede ocurrir el evento es de un total de casos favorables. Entonces la probabilidad del evento se define como

**Observación.** Si el espacio muestral es entonces la definición 2 implica que todos los eventos elementales, los que tienen un elemento solamente, tienen la misma probabilidad

**Propiedades de la probabilidad según la definición de Laplace.** Para el espacio muestral y los eventos y se cumplen:

1. Si y son eventos ajenos entonces

**Demostración. (a)** Supongamos que el espacio muestral tiene elementos y el evento tiene elementos entonces claramente . (b)Los casos favorables de son entonces . (c) Si y son ajenos entonces los casos favorables de la unión se obtienen como , así

**Teorema 1. Más propiedades de la probabilidad.** Sean y eventos entonces

**Demostración.** (a)Si los casos favorables del evento son entonces los casos favorables de son . Así

(b)Si los casos favorables para y son y entonces los casos favorables de son , pues la intersección se cuenta una vez en y una segunda vez en . Por lo tanto,

**Ejercicios.**

1. Utilizando la definición de probabilidad de Laplace demuestre las fórmulas (a) , (b) , donde la diferencia simétrica se define como , (c) si (c) .

**Ayuda: a) ,** ¿por qué?, hacer un diagrama y explique **b)** con la fórmula de **a)** obtenga **y** y súmelas**.** Para **c)** obtenga una fórmula para **,** pero suponiendo que

**Definición 3.** Un experimento E es determinístico si al repetirlo, bajo las mismas condiciones, se obtiene el mismo resultado.

**Ejemplo 2.** Un ejemplo de un experimento determinístico ocurrecuando colocamos una batería en un circuito simple, el modelo matemático que posiblemente describiría el flujo observable de corriente sería , que es la ley de Ohm. El modelo predice el valor de tan pronto se den y .

Aunque este ejemplo parece ser determinístico, casi cualquier modelo físico, químico, económico, etc. debe verse como estocástico, pues, por ejemplo, en el caso del circuito eléctrico las variables y no pueden medirse exactamente, siempre tendremos una incertidumbre sobre su valor y esto hace a que las veamos como variables estocásticas.

**Definición 4.** La teoría de probabilidad es un modelamiento matemático de fenómenos del azar, aleatorios o estocásticos.

**Subtema 1.1.2. Espacios de muestras y eventos.**

**Definición 5.** El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estocástico se denomina **espacio muestral.** Cuando es finitoun evento es cualquier subconjunto de

**Ejemplo 3.** Con respecto al experimento E del lanzamiento de una moneda, el espacio muestral es

.

Los eventos son los subconjuntos de y son

y

Observe cómo se interpretan los eventos

no cae nada y es el evento imposible

sale cara

sale sello

sale cara o sale sello y es el evento seguro. Este evento no

es sale cara y sello

**Ejemplo 4.**  Con respecto al lanzamiento de un dado, el espacio muestral es . Los eventos son todos los subconjuntos de , escribimos algunos

El evento no significa que al lanzar el dado salga 1 y 2 y 3, sino que o sale 1 o sale 2 o sale 3. Además . También el evento “obtener un número entre 3 y 5” es y .

**Definición 6.** El conjunto y son eventos; se denomina el evento imposible y se denomina el evento cierto o seguro.

**Definición 7.** Los eventos pueden combinarse para formar nuevos eventos utilizando las operaciones de conjuntos:

1. es el evento que ocurre sii ocurre o ocurre o ambos.
2. es el evento que ocurre sii ocurre y ocurre.
3. es el evento que ocurre sii no ocurre.

**Definición 8.** Los eventos y son ajenos o mutuamente excluyentes si .

**Definición 9.** Tres eventos o más son **mutuamente excluyentes o ajenos** si cada dos de ellos son mutuamente excluyentes o ajenos.

**Ejemplo 5**. Se lanza un par de dados y se registran los dos números que aparecen en las caras superiores. Sea el evento de que la suma de los 2 números es 6 y el evento en el cual el número mayor de los dos es 6. Calcular(a) (c) , (d) y e) .

**Solución.** Hay seis números posibles en cada dado. Por tanto, comprende los pares de números de la siguiente tabla y de aquí .

|  |  |
| --- | --- |
|  | Segundo Dado |
| Primer  Dado | |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  | |

Sea el evento en el cual la suma de los dos números es 6 y sea el evento en el cual el número mayor de los dos es 4, entonces

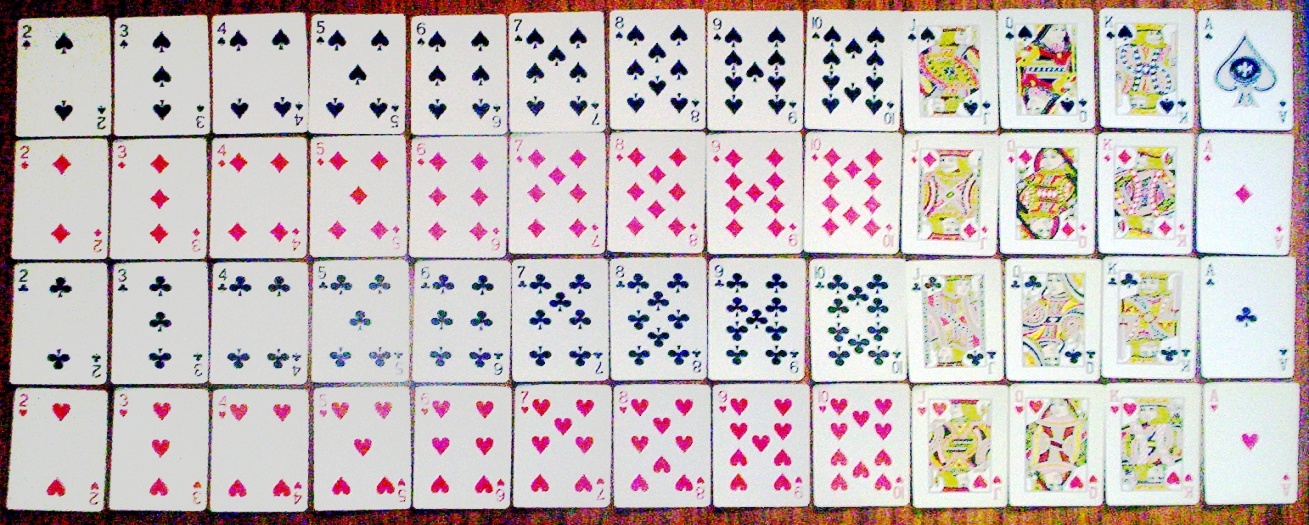
y

Entonces y . Ahora el evento está formado por aquellos pares de enteros cuya suma es 6 y cuyo número más grande es 4. Por tanto y . En forma similar, está formado por aquellos pares de enteros cuya suma es 6 o el número más alto es 4. Por tanto

y

También es *la suma no es 6* y , porque si tiene 5 elementos entonces tiene elementos.

**Ejemplo 6.** Naipe de cartas. Se saca una carta de un naipe ordinario de 52 cartas



El espacio muestral comprende cuatro grupos,

Tréboles(T ), Diamantes(D ), Corazones(C ), Picas(P )

Donde cada grupo contiene 13 cartas que están numeradas de 2 a 10 y la jota(J), la reina(Q), el rey(K) y el as(A). Los corazones y los diamantes son cartas rojas y las picas y los tréboles son cartas negras. El espacio muestra está formado por 52 cartas. Sea el evento de una carta con figura, es decir, una jota(J), una reina(Q) o un rey(K) y sea el evento de un corazón. (a) ¿cuál es la probabilidad de sacar una carta con figura de corazones?, (b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un as?, (c) ¿cuál es la probabilidad de obtener una carta con número 4 o 5?, (d) ¿cuál es la probabilidad de no sacar un número par?

**Solución.** Para (a) tenemos

y

Para (b) hay 4 ases entonces la probabilidad del evento obtener un as es

Para (c) la probabilidad del evento obtener un 4 o 5 es

porque hay 4 cuatros y 4 cincos. Finalmente la probabilidad de no obtener un número par es

pues hay 16 cartas que son impares.

**Ejercicios.**

1. Se saca al azar una carta, encuentre la probabilidad de que la carta sea : (a) un rey, (b) una carta de figura, (c) carta roja, (d) una carta de figura roja.

Respuesta: (a) 1/13, (b) 3/13, (c) ½, (d) 3/26

1. Una caja contiene 15 bolas de billar que están numeradas del 1 al 15. Se saca una bola al azar. Encuentre la probabilidad de que el número sea: (a) par, (b) menor a 5, (c) par y menor a 5, (d) par o menor a 5.

Respuesta: (a) 7/15, (b) 4/15, (c) 2/15, (d) 9/15.

**Ejemplo 7.** En un club deportivo asisten 95 personas, todas practican algún deporte, 80 toman clase de natación, 40 toman clase de yoga y 30 toman clase de spinning. 10 toman clase de natación y de spinning pero no de yoga, 30 de natación y yoga. 4 toman clase solamente de spinning y 92 toman clase de natación o spinning. ¿Cuál es la probabilidad de que a) Tomen clase de yoga solamente? b) Tomen clase de natación, yoga y spinning?

**Solución.** Hacemos un diagrama de Ven como sigue: nombramos un círculo por N para los que toman clase de natación, otro círculo con Y para los que toman clase de yoga y otro círculo por S para los que toman clase de spinning

**N**

**Y**

**S**

Ahora vamos vaciando la información en los círculos de adentro hacia afuera. Para empezar ponemos en la intersección de los 3 círculos, pues no conocemos esta información. Después ponemos para los que toman clase de yoga y spinning solamente, pues tampoco conocemos esta información. Después ponemos los 10 que toman clase de natación y spinning pero no de yoga. Después ponemos para los que toman clase de natación y yoga solamente, pues los que toman clase de natación y yoga son 30. Ahora ponemos 40 en los que toman clase de natación solamente, pues los que toman clase de natación deben ser 80 y

Ahora como los que toman clase de yoga son 40 entonces los que solamente toman clase de yoga deben ser porque

También debemos anotar los 4 que toman solamente clase de spinning. Ahora utilizamos que los que toman clase de natación o spinning son 92 para formar la ecuación

Simplificando nos queda la ecuación

Ahora tomando en cuenta que los que toman clase de spinning son 30 obtenemos la ecuación

Simplificando queda la ecuación

Ahora si podemos responder las preguntas. Para (a) la probabilidad de los que toman clase de yoga solamente es

Para (b) la probabilidad de los que toman clase de natación, yoga y spinning es

**Ejercicios.**

1. En una clase hay 20 estudiantes, de los cuales 7 estudian biología, 9 estudian física y 6 no estudian ni física ni biología. Si se selecciona un estudiante al azar, (a) ¿cuál es la probabilidad de que estudie biología solamente? (b) ¿cuál es la probabilidad de que estudie física y biología?(c) ¿cuál es la probabilidad de que no estudie ni biología ni física?

Respuesta: (a) 7/20, (b) 1/10, (c) 3/10.

**Ayuda:** sea el número de estudiantes que estudian biología y física, calcúlelo.

1. En una escuela de idiomas hay 81 estudiantes. Se tienen 65 alumnos inscritos en inglés, 43 en francés y 12 en mandarín. 25 en inglés y francés pero no en mandarín, 7 en inglés y mandarín, 11 solamente en francés y 78 estudian inglés o francés ¿Cuál es la probabilidad de que a) estudien mandarín solamente? B) estudien los 3 idiomas?

Respuesta: (a) ¼,(b) 5/12. **Ayuda:** sean los estudiantes que estudian inglés, francés y mandarín, los que estudian francés y mandarín únicamente son

**Ejemplo 8.** Considere el siguiente proceso estocástico: el experimento de lanzar una moneda se repite 3 veces y observamos la secuencia de caras y de sellos que aparecen. Sea el evento en que dos o más caras aparecen en forma consecutiva y en el que todos los resultados son iguales. Calcular (a) y (c) .

**Solución.** El espacio muestral consiste en las 8 siguientes ternas ordenadas:

que pueden visualizarse con el siguiente diagrama de árbol. La primera columna corresponde a los resultados del primer lanzamiento, la segunda columna corresponde a los resultados del segundo lanzamiento y lo mismo se puede decir para la tercera columna. Tomando los diferentes caminos de izquierda a derecha es como se obtienen los 8 elementos del espacio muestral.

**Solución.** (a)El evento es y tiene 3 formas de ocurrir de un total de 8 entonces su probabilidad es:

(b)Mientras que el evento es y puede suceder de 2 formas de un total de 8 entonces su probabilidad es

(c)Además es el evento en el que solamente aparecen caras y .

Otra forma de resolver las preguntas es utilizando el diagrama de árbol y poniendo a cada rama la probabilidad con que ocurre cada resultado, que en este caso es . Entonces para sacar la probabilidad de, por ejemplo, el evento sumamos las probabilidades de los 3 caminos que forman al evento

**1/2**

**1/2**

**H**

**H**

**1/2**

**H**

**H**

**H**

**T**

**H**

**T**

**H**

La probabilidad de un camino la obtenemos multiplicando las probabilidades de ese camino. Así obtenemos los mismos resultados.

**Ejemplo 9. Mendenhall.** La víctima de un accidente morirá a menos de que reciba en los próximos 10 minutos una cantidad de sangre tipo A, Rh positivo, que sea suministrada por un solo donante. Se tarda dos minutos en definir el tipo de sangre de un posible donante y dos minutos en realizar la transfusión. Hay una gran cantidad de donantes diferentes cuyo tipo de sangre se desconoce y 40% de ellos tienen el tipo de sangre A, Rh positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que sobreviva la víctima si solamente se dispone de un equipo para determinar el tipo de sangre?

**Solución.** Designemos por cuando un donante tiene sangre tipo A Rh positivo y por cuando el donante no tiene sangre A Rh positivo. En este caso y entonces la víctima se salva si

* : el primer donante es A Rh positivo y tardamos 2 minutos en ver el tipo de sangre y 2 minutos en hacer la transfusión. Este camino nos lleva 4 minutos .
* el primer donante no es A Rh positivo, pero el segundo si y nos llevamos 2 minutos con el primer donante, 2 minutos con el segundo donante y otros 2 minutos con la transfusión. En total nos llevamos 6 minutos por este camino .
* el primer donante no es A Rh positivo, el segundo tampoco es A Rh positivo, pero el tercero si es y nos llevamos 2 minutos con el primero, 2 minutos con el segundo y 2 minutos con el tercero, más otros 2 minutos en hacer la transfusión. Entonces en total nos llevamos 8 minutos
* en este caso nos llevamos 2 minutos con el primer donante, 2 minutos con el segundo donante, 2 minutos con el tercer donante, 2 minutos con cuarto donante y 2 minutos en hacer la transfusión. Entonces en total nos llevamos 10 minutos .
* en este caso nos llevamos en total 12 minutos y la víctima no se salva .

Por lo tanto

De nuevo esta probabilidad se obtiene sumando las probabilidades de los caminos que terminan en y con tiempo menor o igual a 10 minutos.

**Ejercicios.**

1. La probabilidad de que un hombre acierte al blanco es 2/3. Si él le dispara al blanco hasta que acierta por primera vez, encuentre la probabilidad de que le tomen 5 disparos para acertar al blanco.

**Respuesta:** 2/243

**Ayuda:** debe haber primero cuatro fracasos y en el quinto intento un éxito.

1. Se tiene un medicamento que cura una enfermedad con probabilidad 4/5. Si hay 4 pacientes a los que se les da el medicamento, a) ¿cuál es la probabilidad de que se curen 3 pacientes?, b) ¿ninguno?

**Ayuda:** Ponga en el último lugar la persona que no se curó y calcule la probabilidad de esta cuarteta como se hizo en los últimos ejemplos, ¿cuántas cuartetas hay? El orden en las personas que se curan no importa.

**Respuesta:**

1. Se lanza un par de dados repetidamente. (a) Encuentre la probabilidad de que por primera vez ocurra un 11 en el sexto lanzamiento. (b) ¿Cuál es el menor número de lanzamientos necesarios para que la suma acumulada de las probabilidades de obtener 11 sea mayor de 0.95?

**Ayuda:** La probabilidad de obtener 11 es y no obtener 11 en el primer lanzamiento, ni en el segundo, ni en el tercero, … , obtener 11 hasta el sexto lanzamiento.

**Respuesta:** (a) 1419857/34012224, (b) 53

1. En 2 lanzamientos de un par de dados balanceados encuentre la probabilidad de obtener un puntaje de 7 (a) una vez, (b) al menos una vez, (c) dos veces.

**Ayuda:** (a) obtener 7 en el primer lanzamiento pero no en el segundo o no obtener 7 en el primer lanzamiento pero si en el segundo lanzamiento

**Respuesta:** (a)5/18, (b) 11/36, (c) 1/36.